数理解析研究所講究録
1515巻 2006年 25-33

非付値的弱順序極小な実閉体上の関数の微分可能性について

岡山大学大学院・自然科学研究科 田中 広志
htanaka@math.okayama-u.ac.jp
和歌山大学・教育学部 川上 智博
kawa@center.wakayama-u.ac.jp

ここでは, 以下の定理を証明することを目標とする。

定理 R を順序体の非付値的弱順序極小拡張, $A \subset R$ をデファイナブルかつ開, $f: A \to \overline{R}$ をデファイナブルとする. このとき写像 f は, A 上有限個の点を除き微分可能である.

1 Introduction

$(R, <, \ldots)$ を稠密で端点をもたない全順序構造とする. 以後, 構造と書けば, 稠密で端点をもたない全順序構造を表し, また R と $(R, <, \ldots)$ を同一視しておく. 全順序集合 R の部分集合 A が, 任意の $a, b \in A$ と $c \in R$ に対して, $a < c < b$ ならば $c \in A$ をみたすとき, A は R の**凸集合**とよぶ. さらに $\sup A, \inf A \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$ のとき, A は R の**区間**とよぶ. 構造 R の任意のデファイナブル部分集合 D が, 区間 (凸集合) の有限和で表せるとき, R は**順序極小構造** (**弱順序極小構造**) であるとよぶ. 理論 $\mathrm{Th}(R)$ の任意のモデルが順序極小 (弱順序極小) になるとき, $\mathrm{Th}(R)$ は**順序極小理論** (**弱順序極小理論**) とよぶ.

今後, R はすべて弱順序極小構造とする. $C, D \subset R$ とする. 任意の $c \in C, d \in D$ に対して $c < d$ のとき, $C < D$ と書く. 順序対 $\langle C, D \rangle$ が, $C < D$ かつ $C \cup D = R$ でさらに D が最小元を持たないとき, **切断**とよぶ. R のデファイナブル切断全体を $\overline{R}$ によって表すことにする. 特に R が順序極小構造ならば $R = \overline{R}$ である. 任意の $a \in R$ に対して, デファ

イナブル切断 $\langle(-\infty,a],(a,+\infty)\rangle$ を考えることにより, $R\subset\overline{R}$ とみなす. さらに $\langle C_1,D_1\rangle<\langle C_2,D_2\rangle$ を $C_1\subsetneq C_2$ と定義することにより, $(R,<)$ を $(\overline{R},<)$ の部分構造とみなす.

R $(\overline{R})$ 上に, R $(\overline{R})$ の開区間を基本開集合として位相を入れる.

例 1.1 構造 $(\mathbb{Q},<,P)$ を考える. ここで $P:=(-\sqrt{2},\sqrt{2})\cap\mathbb{Q}$ とする. このとき, $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{Q}\cup\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$ となる. ただし, $\pm\sqrt{2}$ と $\langle(-\infty,\pm\sqrt{2}),(\pm\sqrt{2},+\infty)\rangle$ は同一視している.

n を自然数とし, $A\subset R^n$ をデファイナブル集合とする. 写像 $f:A\to\overline{R}$ において, 集合 $\{\langle x,y\rangle\in A\times R: y<f(x)\}$ (これを $\Gamma_<(f)$ で表す) がデファイナブルになるとき, f は**デファイナブル**であるという.

注意 1.2 写像 $f:A\to R$ がデファイナブルであることと, $\{\langle x,y\rangle\in A\times R: y=f(x)\}$ がデファイナブルであることは同値である.

例 1.3 構造 $(\mathbb{Q},+,<,P)$ を考える. ここで $P:=(-\sqrt{2},\sqrt{2})\cap\mathbb{Q}$ とする. 写像 $f:\mathbb{Q}\to\overline{\mathbb{Q}}$ を $f(a):=a+\sqrt{2}$ とする. このとき,

$$\Gamma_<(f)=\{\langle x,y\rangle\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}:\exists z\in P\ (y<x+z)\}$$

となり, f はデファイナブルである.

構造 $R=(R,+,<,\dots)$ を順序群 $(R,+,<)$ の弱順序極小拡張とする. このとき [3] の定理 5.1 より, R は可除アーベル群になる. 切断 $\langle C,D\rangle$ が $\inf\{y-x: x\in C, y\in D\}=0$ をみたすとき, **非付値的**という. 構造 R の任意のデファイナブル切断が非付値的になるとき, R を**非付値的**という.

この非付値的という概念は次の問題を解くために考えられた.

問題 1.4 ([3, 問題 1]) 構造 R が順序群 (または順序体) の弱順序極小拡張ならば, $\mathrm{Th}(R)$ も弱順序極小であるか.

この問題は順序群の場合, V. Verbovskiy により反例があることがわかっている. しかしながら, 非付値的の場合は正しい.

定理 1.5 ([4, 系 2.15]) 構造 R が順序群の非付値的弱順序極小拡張ならば, $\mathrm{Th}(R)$ も弱順序極小である.

構造 $R=(R,+,<,\ldots)$ を順序群 $(R,+,<)$ の非付値的弱順序極小拡張とする. 任意の部分集合 $A,B\subset R$ に対し, $A\pm B:=\{x\pm y : x\in A, y\in B\}$ と定める. 集合 $\overline{R}$ の任意の元 $\langle C_1,D_1\rangle,\langle C_2,D_2\rangle$ に対し, $\langle C_1,D_1\rangle+\langle C_2,D_2\rangle:=\langle C_1+C_2,D_1+D_2\rangle$ と加法を定める. すると構造 $(\overline{R},+,<)$ は可除アーベル群になり, 構造 $(R,+,<)$ はその部分構造となる.

また構造 $R=(R,+,\cdot,<,\ldots)$ を順序体 $(R,+,\cdot,<)$ の非付値的弱順序極小拡張とする. このとき [3] の定理 5.3 より, R は実閉体になる. 任意の部分集合 $A,B\subset R$ に対し, $A\cdot B:=\{x\cdot y : x\in A, y\in B\}$, $-A:=\{-x : x\in A\}$ と定める. 集合 $\overline{R}$ の任意の元 $\langle C_1,D_1\rangle,\langle C_2,D_2\rangle$ に対し,

$$\langle C_1,D_1\rangle\cdot\langle C_2,D_2\rangle$$
$$:=\begin{cases}\langle R\setminus(D_1\cdot D_2),D_1\cdot D_2\rangle & 0\in C_1\text{かつ}\,0\in C_2\text{のとき}\\ \langle \mathrm{cl}(-((-C_1)\cdot D_2)),R\setminus \mathrm{cl}(-((-C_1)\cdot D_2))\rangle & 0\in D_1\text{かつ}\,0\in C_2\text{のとき}\\ \langle \mathrm{cl}(-(D_1\cdot(-C_2))),R\setminus \mathrm{cl}(-(D_1\cdot(-C_2)))\rangle & 0\in C_1\text{かつ}\,0\in D_2\text{のとき}\\ \langle R\setminus \mathrm{int}(C_1\cdot C_2),\mathrm{int}(C_1\cdot C_2)\rangle & 0\in D_1\text{かつ}\,0\in D_2\text{のとき}\end{cases}$$

と乗法を定める. すると構造 $(\overline{R},+,\cdot,<)$ は実閉体になり, 構造 $(R,+,\cdot,<)$ はその部分構造となる.

定義 1.6 弱順序極小構造 $R=(R,<,\ldots)$ が, R の任意のデファイナブル部分集合 I と任意のデファイナブル写像 $f:I\to\overline{R}$ に対して, ある有限集合 X とデファイナブル凸開集合 $I_0,\ldots,I_k$ が存在して, $I=X\amalg I_0\amalg\cdots\amalg I_k$ かつ任意の $i\le k$ に対して

- $f|I_i$ は一定,
- $f|I_i$ は狭義単調増加かつ任意の $a,b\in I_i$ と $c,d\in R$ に対して $a<b$ かつ $f(a)<c<d<f(b)$ ならば, $c<f(x)<d$ をみたす $x\in(a,b)$ が存在する; 特に f は連続,
- $f|I_i$ は狭義単調減少かつ任意の $a,b\in I_i$ と $c,d\in R$ に対して $a<b$ かつ $f(a)>c>d>f(b)$ ならば, $c>f(x)>d$ をみたす $x\in(a,b)$ が存在する; 特に f は連続

のどれかひとつが成り立つとき, 構造 R は**強単調性**をもつという.

定理 1.7 ([4, 補題 1.4]) 構造 $\mathcal{R} = (R, +, <, \dots)$ を順序群 $(R, +, <)$ の弱順序極小拡張とする. このとき次は同値である:

1. $\mathcal{R}$ は非付値的である,
2. $\mathcal{R}$ は強単調性をもつ.

定義 1.8 弱順序極小構造 $\mathcal{R} = (R, <, \dots)$ に対して, **強セル** とその完備化を帰納的に定義する:

1. R の 1 点集合は**強 $\langle 0 \rangle$ セル**とする. $C \subset R$ が強 $\langle 0 \rangle$ cell のとき, $\overline{C} := C$ と定める.
2. R の空でないデファイナブル凸開集合は**強 $\langle 1 \rangle$ セル**とする. $C \subset R$ が強 $\langle 1 \rangle$ セルのとき, $\overline{C} := \{x \in \overline{R} : \exists a, b \in C, a < x < b\}$ と定める.
3. $C \subset R^m$ が強 $\langle i_1, \dots, i_m \rangle$ セルで $f : C \to R$ がデファイナブルで連続, さらに連続な拡張 $\overline{f} : \overline{C} \to \overline{R}$ をもつとき, $\Gamma(f)$ は**強 $\langle i_1, \dots, i_m, 0 \rangle$ セル**とし, $\overline{\Gamma(f)} := \Gamma(\overline{f})$ と定める.
4. $C \subset R^m$ が強 $\langle i_1, \dots, i_m \rangle$ セルで $g, h : C \to \overline{R}$ がデファイナブルで連続, さらに連続な拡張 $\overline{g}, \overline{h} : \overline{C} \to \overline{R}$ をもち, 任意の $\overline{x} \in \overline{C}$ に対して $\overline{g}(\overline{x}) < \overline{h}(\overline{x})$ のとき,
$$(g, h)_C := \{\langle \overline{a}, b \rangle \in C \times R : g(\overline{a}) < b < h(\overline{a})\}$$
は**強 $\langle i_1, \dots, i_m, 1 \rangle$ セル**とし,
$$\overline{(g, h)_C} := \{\langle \overline{a}, b \rangle \in \overline{C} \times \overline{R} : \overline{g}(\overline{a}) < b < \overline{h}(\overline{a})\}$$
と定める.
5. ある $i_1, \dots, i_m$ が存在して, $C \subset R^m$ が強 $\langle i_1, \dots, i_m \rangle$ セルとなるとき, C は**強セル**とよぶ.

$C \subset R^n$ を強セルとし, 写像 $f : C \to \overline{R}$ をデファイナブルとする. このとき, f が連続な拡張 $\overline{f} : \overline{C} \to \overline{R}$ をもつとき, f は**強連続**であるという.

定義 1.9 $\mathcal{R} = (R, <, \dots)$ を弱順序極小構造, $m \in \mathbb{N}$, $X \subset R^m$ を空でないデファイナブル集合とする. 以下で, X の**強セル分解**を m に関して帰納的に定義する.

1. X を R の空でないデファイナブル部分集合で, $\mathcal{D} = \{C_0, \ldots, C_k\}$ を強セルによる X の分割とする. このとき, $\mathcal{D}$ は X の**強セル分解**であるという.

2. X を R^{m+1} の空でないデファイナブル部分集合で, $\mathcal{D} = \{C_0, \ldots, C_k\}$ を強セルによる X の分割とし, $\pi : R^{m+1} \to R^m$ を最後の座標を除く射影とする. このとき, $\{\pi(C_0), \ldots, \pi(C_k)\}$ が $\pi(X)$ の強セル分解になるとき, $\mathcal{D}$ は X の**強セル分解**であるという.

定義 1.10 $\mathcal{R} = (R, <, \ldots)$ を弱順序極小構造, $m \in \mathbb{N}$, $X, Y \subset R^m$ をデファイナブル集合, $X \neq \emptyset$ とする. また $\mathcal{D}$ を X の強セル分解とする. このとき, 任意の $C \in \mathcal{D}$ に対して, $C \subset Y$ または $C \cap Y = \emptyset$ となるとき, $\mathcal{D}$ は Y を**分割する**という.

定義 1.11 $\mathcal{R} = (R, <, \ldots)$ を弱順序極小構造とする. 任意の $m, k \in \mathbb{N}$ とデファイナブル集合 $X_1, \ldots, X_k \subset R^m$ に対して, $X_1, \ldots, X_k$ のすべてを分割するような R^m の強セル分解が存在するとき, $\mathcal{R}$ は**強セル分解**をみたすという.

定理 1.12 ([4, 定理 2.14]) 構造 $\mathcal{R} = (R, +, <, \ldots)$ を順序群 $(R, +, <)$ の非付値的弱順序極小拡張とする. $m \in \mathbb{N}$ とする. このとき次が成り立つ.

1. $\mathcal{R}$ は強セル分解をみたす.

2. $X \subset R^m$ を空でないデファイナブル集合, $f : X \to \overline{R}$ をデファイナブルとする. このとき X のある強セル分解 $\mathcal{D}$ で, 任意 $C \in \mathcal{D}$ に対して $f|C$ が強連続となるものが存在する.

定理 1.13 構造 $\mathcal{R} = (R, +, \cdot, <, \ldots)$ を順序体 $(R, +, <)$ の非付値的弱順序極小拡張とする. また $D \subset R$ を空でないデファイナブル開集合, $f : D \to \overline{R}$ をデファイナブルとする. このとき, f は D 上有限個の点を除いて微分可能である.

2 定理 1.13の証明

この章では, 定理 1.13 の証明をする. 以後この章を通して, $\mathcal{R} = (R, +, \cdot, <, \ldots)$ を順序体 $(R, +, \cdot, <)$ の非付値的弱順序極小拡張とする.

K を全順序集合, I をその部分集合とする. I が K の**部分切片**とは, ある $x \in I$ が存在して, $y \leq x$ ならば $y \in I$ となることである. I が K の部分切片である必要十分条件は, ある $a \in I$ が存在して $(-\infty, a] \subset I$ となることである.

例 2.1 $K = (\mathbb{Q}, <)$ とし, $a, b, c \in \mathbb{Q}$ かつ $a < b < c$ とする. 集合 $(-\infty, a)$ と $(-\infty, a) \cup (b, c)$ は, $\mathbb{Q}$ の部分切片であるが, (b, c) は $\mathbb{Q}$ の部分切片でない.

補題 2.2 ([4, 補題 1.2]) $R = (R, <, \ldots)$ を弱順序構造, $I \subset R$ を空でないデファイナブル凸開集合とする. $f : I \to \overline{R}$ をデファイナブル関数とする. 極限値 $\lim_{x \to \inf I + 0} f(x)$ と $\lim_{x \to \sup I - 0} f(x)$ が $\overline{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ の中に存在する.

(証明). $\lim_{x \to \inf I + 0} f(x)$ の存在を示せばよい. 各 $c \in R$ に対して,

$$
\begin{aligned}
I_1(c) &:= \{x \in I : f(x) < c\}, \\
I_2(c) &:= \{x \in I : f(x) = c\}, \\
I_3(c) &:= \{x \in I : f(x) > c\}
\end{aligned}
$$

と定義する. このとき $\langle I_1(c), I_2(c), I_3(c) \rangle$ は, I のデファイナブル集合への分割である. 各 $i \in \{1, 2, 3\}$ に対して, $X_i := \{c \in R : I_i(c)$ は I の部分切片である$\}$.

主張. $|X_2| \leq 1$, $X_3 < X_2 < X_1$ かつ $\langle X_1, X_2, X_3 \rangle$ は R のデファイナブル集合への分割である.

主張の証明. まず, $|X_2| \leq 1$ を確かめる. $|X_2| \geq 2$ とする. $a, b \in X_2$ かつ $a \neq b$ をとる. このとき, $I_2(a)$ と $I_2(b)$ は I の部分切片である. よって, $x \in I_2(a)$ が存在して, $x_1 \leq x$ ならば $x_1 \in I_2(a)$. また, $y \in I_2(b)$ が存在して, $y_1 \leq y$ ならば $y_1 \in I_2(b)$. $z := \min\{x, y\}$ とするとき, $z_1 \leq z$ ならば $z_1 \in I_2(a) \cap I_2(b)$. I_2 の定義より, $a = f(z_1) = b$ となって矛盾する.

次に $X_3 < X_2 < X_1$ を示す. $a \in X_3$ と $b \in X_2$ をとる. このとき, $I_3(a)$ と $I_2(b)$ は I の部分切片である. よって, $x \in I_3(a) \cap I_2(b)$ が存在して, $a < f(x) = b$. だから $X_3 < X_2$. 同様に $X_2 < X_1$.

最後に $\langle X_1, X_2, X_3 \rangle$ が R のデファイナブル集合への分割となることを証明する. $c \in R$ とする. R は弱順序極小なので, 各 $i \in \{1, 2, 3\}$ に対して, $I_i(c)$ は凸集合の有限和である. $\langle I_1(c), I_2(c), I_3(c) \rangle$ は I の分割なので,

ある $i \in \{1,2,3\}$ が存在して $I_i(c)$ は I の部分切片である．よって $c \in X_i$.

■

$X_1 = \emptyset$ とすると，$X_3 = R$ となる．各 $c \in X_3$ に対して $I_3(c)$ は I の部分切片である．このとき，$x \in I_3(c)$ が存在して，$y \leq x$ ならば $f(y) > c$. よって，$\lim_{x \to \inf I + 0} f(x) = +\infty$.

$X_3 = \emptyset$ とする．同様に，$\lim_{x \to \inf I + 0} f(x) = -\infty$.

$X_1 \neq \emptyset$ かつ $X_3 \neq \emptyset$ とする．各 $a \in X_1$ と各 $b \in X_3$ に対して，$b \leq \lim_{x \to \inf I + 0} f(x) \leq a$. よって，$\lim_{x \to \inf I + 0} f(x) = \inf X_1 = \sup X_3 \in \overline{R}$.

■

$I \subset R$ を空でないデファイナブル凸開集合，$f : I \to \overline{R}$ をデファイナブルとする．任意の $x \in I$ に対して

$$f'_+(x) := \lim_{t \to +0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t},$$
$$f'_-(x) := \lim_{t \to -0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t},$$
$$f'(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

と定める．

補題 2.3 $I \subset R$ を空でないデファイナブル凸開集合，$f : I \to \overline{R}$ をデファイナブルとする．任意の $x \in I$ に対して，$f'_+(x), f'_-(x)$ は $\overline{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ 上存在する．

(証明)．任意の $x \in I$ に対して ある開区間 $(0, \varepsilon)$ 上写像 g を，$g(t) := t^{-1}(f(x+t) - f(x))$ と定める．すると補題 2.2 より，$f'_+(x) = \lim_{t \to +0} g(t)$ は $\overline{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ 上存在する．同様に $f'_-(x)$ が存在することも示せる．

■

補題 2.4 $I \subset R$ を空でないデファイナブル凸開集合，$f : I \to \overline{R}$ をデファイナブルかつ強連続とする．このとき，$f'_+ > 0$ ($f'_+ < 0$) ならば，f は狭義単調増加 (狭義単調減少) になる．また f'_- の場合についても同様のことがいえる．

(証明)．定理 1.7 より証明される． ■

注意 2.5 上記の補題において f が強連続という仮定は必要であり，単に連続では成り立たない．

補題 2.6 $I \subset R$ を空でないデファイナブル凸開集合, $f : I \to \overline{R}$ をデファイナブルかつ強連続とする. また $f'_+(I)$, $f'_-(I) \subset \overline{R}$ かつ f'_+, f'_- は I 上連続とする. このとき, f は I 上微分可能であり, f' は I 上連続になる.

(証明). I 上の任意の点 x に対して, $f'_+(x) = f'_-(x)$ を示せばよい. もし仮に, $f'_+(a) > f'_-(a)$ となる $a \in I$ が存在したとする. f'_+, f'_- は I 上連続より, $f'_+(J) > c > f'_-(J)$ となる $c \in R$ と a を含む I の部分開区間 J が存在する. さて J の任意の元 x に対して, $g(x) := f(x) - cx$ と定める. すると, g は J 上強連続である. また J 上の $g'_+ > 0$ かつ $g'_- < 0$ となる. よって補題 2.4 より, g は狭義単調増加かつ狭義単調減少になる. これは矛盾する. ■

補題 2.7 $I \subset R$ を空でないデファイナブル凸開集合, $f : I \to \overline{R}$ をデファイナブルかつ強連続とする. このとき $f'_+(x), f'_-(x) \in \{-\infty, +\infty\}$ となる I 上の点は有限個しかない.

(証明). $f'_+(x) = +\infty$ となる I 上の点は有限個しかないことを示す. $-\infty$ の場合も同様. 仮に $K := \{x \in I : f'_+(x) = +\infty\}$ が無限集合になったとする. このとき, R の弱順序極小性より, K はある空でない開区間 J を含む. $a < b$ となる J の元 a, b をとる. J の任意の元 x に対して,

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

と定める. すると, g は J 上強連続かつ $g(a) = g(b)$ となる. ところで, J の任意の元 x に対して, $g'_+(x) > 0$ である. よって補題 2.4 より, g は J 上狭義単調増加になる. これは, $g(a) = g(b)$ であることに反する. したがって $f'_+(x) = +\infty$ となる I 上の点は有限個しかない.

$f'_-(x)$ の場合も同様にいえる. ■

(定理 1.13 の証明). 定理 1.12, 補題 2.3, 補題 2.6, 補題 2.7 より成り立つ. ■

参考文献

[1] M. Coste, *An introduction to o-minimal geometry*, Dottorato di Ricerca in Matematica, Dip. Mat. Univ. Pisa, Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali (2000).

[2] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Lecture notes series **248**, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).

[3] D. Macpherson, D. Marker and C. Steinhorn, *Weakly o-minimal structures and real closed fields*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 5435–5483.

[4] R. Wencel, *Weakly o-minimal non-valuational structures*, preprint.